MIȘCAREA CIRCULARĂ UNIFORMĂ (M.C.U.)

EXERCIȚII

$\boxed{\alpha(t) = \alpha_0 + \omega \cdot (t - t_0)}$ LEGEA MIȘCĂRII CIRCULARE UNIFORME

$\boxed{\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}} = const$ $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$ $\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$ $\boxed{\omega = 2\pi\nu}$

$\boxed{v = \omega \cdot R}$

$\boxed{s = \alpha \cdot R}$

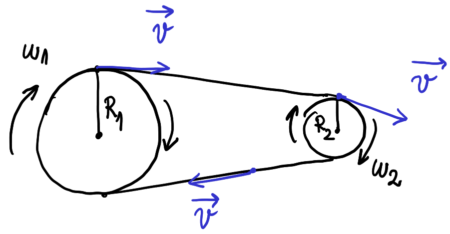
$\boxed{a_{cp} = \frac{v^2}{R}}$ $\boxed{a_{cp} = v \cdot \omega}$ $\boxed{a_{cp} = \omega^2 R}$

$\boxed{F_{cp} = m \cdot a_{cp} = \frac{m \cdot v^2}{R}}$

① O curea de transmisie de la bicicletă antrenează două roți. O roată mare are raza $R_1 = 30cm$, iar cealaltă $R_2 = 5cm$. Roata mică este pusă în mișcare de rotație de pedalele bicicletei, cu viteza unghiulară $\omega_2 = 30 rad/s$. Să se afle viteza unghiulară a roții mari.

$R_1 = 30cm$
$R_2 = 5cm$
$\omega_2 = 30 rad/s$

$\omega_1 = ?$

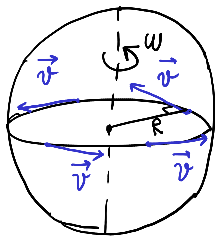


$$v = R_1 \cdot \omega_1 \quad v = R_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2 \Rightarrow \omega_1 = \frac{R_2 \omega_2}{R_1} = \frac{5\cancel{cm} \cdot 30 \frac{rad}{s}}{30\cancel{cm}} = 5 \frac{rad}{s}$$

② Pământul se rotește în jurul propriei axe într-un interval de timp $T = 24h$. Cunoscând raza medie a Pământului $R_P = 6400km$, să se afle viteza unghiulară de rotație a Pământului și viteza periferică a acestuia.

$T = 24h$
$R_P = 6400km$

a) $\omega_P = ?$
b) $v = ?$



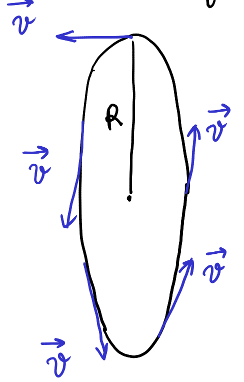
$$\omega_P = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \frac{rad}{s}$$

$$v = \omega_P \cdot R = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \cdot 6400000 = 465{,}42 \frac{m}{s} = 1675{,}51 \frac{km}{h}$$

③ La un spectacol aeronautic, un avion execută o buclă (un cerc în plan vertical), cu raza $R = 1Km$. Viteza avionului este $v = 800m/s$. Să se afle viteza unghiulară a avionului și distanța parcursă într-o buclă completă.

$R = 1Km$
$v = 800m/s$

a) $\omega = ?$
b) $s = ?$



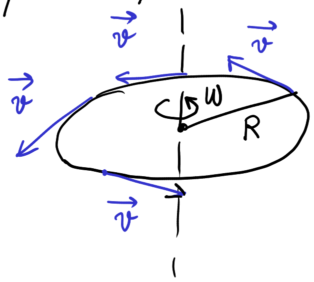
$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{800}{1000} = 0{,}8 \frac{rad}{s}$$

$$s = 2\pi R = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1000 = 6283{,}18m$$

4) Un polizor are raza $R=25cm$. Polizorul se rotește cu viteza liniară maximă $v=7,85\frac{m}{s}$. Să se afle frecvența maximă cu care se poate roti polizorul.

$R=25cm$
$v=7,85\frac{m}{s}$

$\nu_{max}=?$



$$\omega=\frac{v}{R}=\frac{7,85}{0,25}=31,4\ rad/s$$

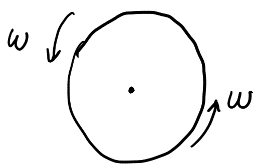
$$\omega=2\pi\nu \Rightarrow \nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{31,4}{2\cdot\pi}=5\frac{1}{s}=5Hz$$

$$\nu_{max}=5\frac{rotații}{s}$$

5) Să se afle viteza unghiulară a unei roți de mașină care efectuează $N=100$ rotații într-un timp $t=50s$.

$N=100$ rotații
$t=50s$

a) $\omega=?$



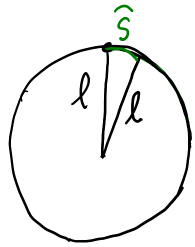
$$\nu=\frac{N}{t}=\frac{100\ rotații}{50s}=2\frac{rotații}{s} \Rightarrow \nu=2Hz$$

$$\omega=2\pi\nu=4\pi=12,56\frac{rad}{s}$$

6) Un minutar are lungimea $l=4cm$. Să se afle cu cât s-a deplasat într-un sfert de minut

$l=4cm$
$\Delta t=\frac{1}{4}min=\frac{1}{4}\cdot 60s=15s$

$\hat{S}=?$



3600s .... $\hat{S}=2\pi l$
15s .... $\hat{S}=x$

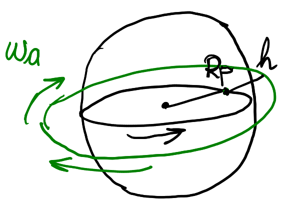
$$\Rightarrow x=\frac{15\cdot 2\pi\cdot(0,04)}{3600}=0,001047m$$

$x=1,047\ mm$

7) Un avion zboară deasupra ecuatorului spre vest la înălțimea $h=30\ km$ față de suprafața Pământului. Să se afle viteza cu care trebuie să zboare acest avion pentru a vedea Soarele staționar, dacă raza medie a Pământului este $R_p=6370\ km$.

$h=30\ km$
$R_p=6370km$

$v_a=?$



$$\omega_p=\frac{2\pi}{T} \quad \omega_a=\frac{v_a}{(R_p+h)}$$

$$\omega_p=\omega_a \Rightarrow \frac{2\pi}{T}=\frac{v_a}{R_p+h} \Rightarrow v_a=\frac{2\pi\cdot(R_p+h)}{T}$$

$$v_a=\frac{2\pi\cdot 6400\,000}{3600\cdot 24}$$

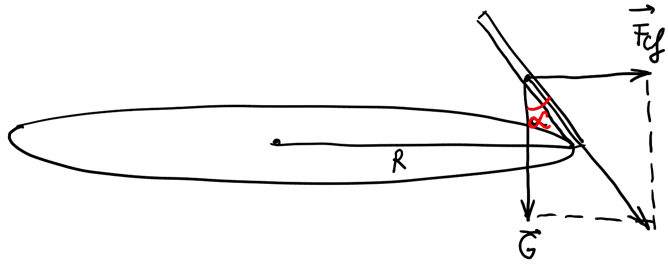
$$v_a=465,42\frac{m}{s}$$

8) Să se afle unghiul față de verticală cu care trebuie să se încline un motociclist la o curbă cu raza $R=69{,}2m$, pentru a nu cădea, dacă acesta intră în curbă cu viteza $v=72\frac{km}{h}$.

$R=69{,}2m$

$v=72\frac{km}{h}=72\cdot\frac{1000m}{3600s}=20\frac{m}{s}$

$\alpha=?$



$tg\alpha=\frac{CO}{CA}=\frac{F_{cf}}{G}=\frac{\cancel{m}\cdot\frac{v^2}{R}}{\cancel{m}\cdot g}$

$\Rightarrow tg\alpha=\frac{v^2}{Rg}$

$\alpha=arctg\left(\frac{v^2}{Rg}\right)$

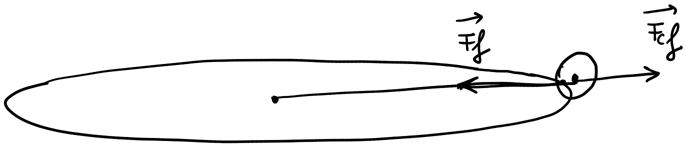
$\alpha=arctg\left(\frac{20^2}{69{,}2\cdot10}\right)\cong30{,}02^0$

9) Să se afle viteza maximă cu care poate să efectueze o mașină un viraj cu raza $R=100m$ pentru ca aceasta să nu derapeze, dacă coeficientul de frecare dintre șosea și anvelope este $\mu=0{,}25$.

$R=100m$

$\mu=0{,}25$

$v_{max}=?$



Mașina nu derapează $\Rightarrow$

$F_{cf}=F_f$

$\frac{\cancel{m}\cdot v^2}{R}=\mu\cancel{m}g$

$\Rightarrow v=\sqrt{R\mu g}=\sqrt{100\cdot0{,}25\cdot10}$

$v=15{,}81\frac{m}{s}=56{,}92\frac{km}{h}$

10) Un pilot cu masa $m=80kg$ execută o buclă cu raza $R=800m$ în plan vertical cu viteza $v=720\frac{km}{h}$. Să se afle forțele cu care apasă pilotul asupra scaunului în punctul inferior și în punctul superior al traiectoriei.

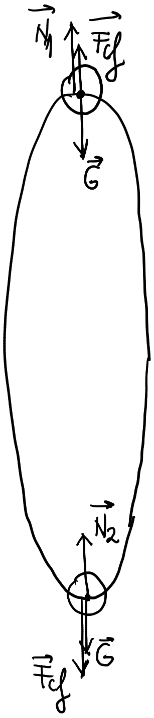
$m=80kg$

$R=800m$

$v=720\frac{km}{h}=720\cdot\frac{1000m}{3600s}=200\frac{m}{s}$

$N_1=?$

$N_2=?$



$N_1=F_{cf}-G=\frac{mv^2}{R}-mg$

$=\frac{80\cdot200^2}{800}-800=3200N$

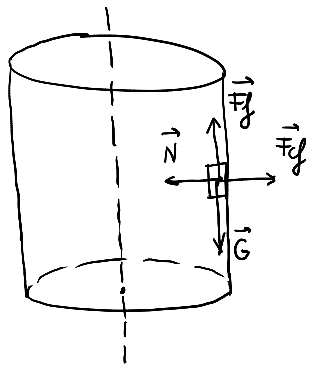
$N_2=G+F_{cf}=mg+\frac{mv^2}{R}$

$=800+\frac{80\cdot200^2}{800}$

$=4800N$

(11) Să se afle frecvența cu care trebuie rotit un cilindru cu raza $r = 50\,cm$ în jurul axei sale verticale, pentru ca un corp așezat pe peretele interior al cilindrului să rămână în repaus față de cilindru, dacă coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și cilindru este $\mu = 0{,}5$.

$r = 50\,cm$
$\mu = 0{,}5$
$\nu = ?$



Repaus $\Rightarrow$ $G = F_f$, $N = F_{cf}$

$\Rightarrow$ $mg = \mu N$, $N = m\omega^2 r$

$\cancel{m}g = \mu \cancel{m}\omega^2 r$

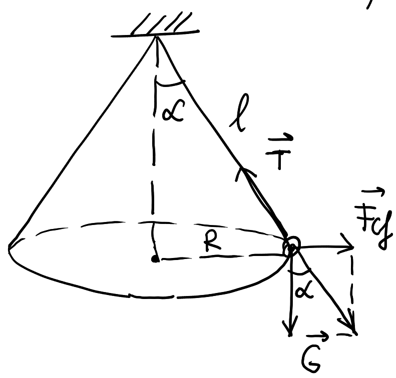
$\omega = \sqrt{\frac{g}{\mu r}}$

$\Rightarrow 2\pi\nu = \sqrt{\frac{g}{\mu r}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\mu r}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10}{0{,}5 \cdot 0{,}5}}$

$\nu = 1{,}006\ Hz$

$\nu \simeq 1\ \frac{\text{rotație}}{\text{secundă}}$

(12) Un corp punctiform cu masa $m = 100\,g$ este suspendat de un fir cu lungimea $l = 30\,cm$. Corpul este pus să descrie un cerc în plan orizontal ca în figură, unghiul făcut de fir cu verticala în timpul mișcării este $\alpha = 60°$.
Să se afle: a) perioada de rotație a corpului
b) tensiunea din fir



$m = 100g = 0{,}1\,kg$
$l = 30\,cm = 0{,}3\,m$
$\alpha = 60°$

a) $T = ?$
b) $T = ?$

a) $R = l\sin\alpha$

$tg\alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{F_{cf}}{G} \Rightarrow F_{cf} = G \cdot tg\alpha$

$\cancel{m}(\omega^2 R) = \cancel{m}g\, tg\alpha$

$\omega = \sqrt{\frac{g\, tg\alpha}{R}}$

$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g \cdot \frac{\cancel{\sin\alpha}}{\cos\alpha}}{l \cdot \cancel{\sin\alpha}}}$

$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{10}{0{,}3 \cdot \frac{1}{2}}}} \simeq 0{,}77\,s$

b) $\cos\alpha = \frac{G}{T} \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{0{,}1 \cdot 10}{\frac{1}{2}} = 2N$

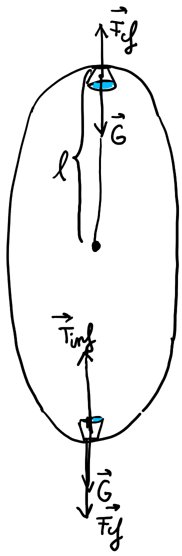
13) Un copil rotește o găleată cu apă cu masa totală $m = 4\,kg$ prinsă de o sfoară cu lungimea $l = 50\,cm$, în plan vertical.
Să se afle:
a) frecvența minimă de rotații pentru ca apa să nu curgă
b) tensiunea din sfoară în punctul inferior al traiectoriei în condițiile punctului anterior
c) tensiunea în sfoară în punctul superior al traiectoriei, dacă frecvența cu care se rotește sistemul se dublează

$m = 4\,kg$
$l = 50\,cm = 0{,}5\,m$

---

a) $\nu_{min} = ?$
b) $T_{inf} = ?$
c) $T_{sup} = ?$, $\nu' = 2\nu_{min}$

a)



Apa nu trebuie să curgă în punctul superior al traiectoriei.

$\Rightarrow F_{cf} = G$

$m(\omega^2 l) = mg$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$2\pi\nu_{min} = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\Rightarrow \nu_{min} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$

$\nu_{min} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10}{0{,}5}} = 0{,}711\,Hz$

b)

$T_{inf} - F_{cf} - G = 0$

$\Rightarrow T_{inf} = G + F_{cf} = mg + m\omega^2 l$

$= 4 \cdot 10 + 4 \cdot 4\pi^2 \cdot (0{,}711)^2 \cdot 0{,}5$

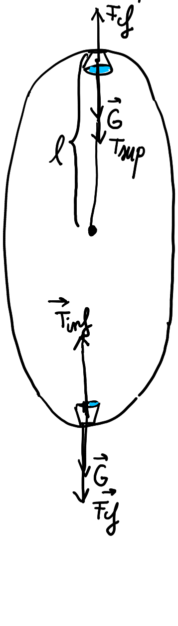
$= 80\,N$

$T_{sup} = G - F_{cf}$

$= 4 \cdot 10 - 4 \cdot 4\pi^2 \cdot (0{,}711)^2 \cdot 0{,}5$

$= 0\,N$

c)



$T_{sup} = F_{cf}' - G$

$= m \cdot (\omega')^2 l - mg$

$= m \cdot 4^2 \cdot \pi^2 \cdot \nu_{min}^2 \cdot l - mg$

$= 4 \cdot 4^2 \cdot \pi^2 \cdot (0{,}711)^2 \cdot 0{,}5 - 4 \cdot 10$

$= 119{,}65\,N$

$\omega' = 2\pi\nu' = 2\pi \cdot (2\nu_{min}) = 4\pi\nu_{min}$

(14) De o tijă verticală sunt prinse două cabluri care susțin un corp cu masa $m = 200g$. Primul cablu are lungimea $l_1 = 30cm$. Se pune sistemul într-o mișcare de rotație ca în figura alăturată cu viteza unghiulară $\omega = 10\ rad/s$, astfel încât cablul superior formează cu tija un unghi $\alpha = 60^\circ$ iar cablul inferior formează cu tija un unghi $\beta = 30^\circ$. Să se afle tensiunile în cele două cabluri.

$m = 200g = 0{,}2Kg$

$l_1 = 30cm = 0{,}3m$

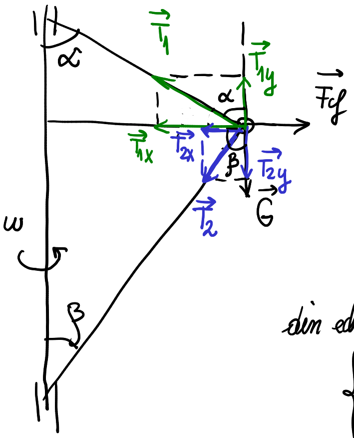
$\omega = 10 rad/s$

$\alpha = 60^\circ$

$\beta = 30^\circ$

$T_1 = ?$

$T_2 = ?$



$T_{1y} = T_1 \cos\alpha$

$T_{1x} = T_1 \sin\alpha$

$T_{2y} = T_2 \cos\beta$

$T_{2x} = T_2 \sin\beta$

din echilibrul forțelor:

$$\begin{cases} F_{cf} = T_{1x} + T_{2x} \\ T_{1y} = G + T_{2y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\omega^2 \cdot (l_1 \sin\alpha) = T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta \\ T_1 \cos\alpha = mg + T_2 \cos\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0{,}2 \cdot 10^2 \cdot 0{,}3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = T_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + T_2 \cdot \frac{1}{2} \\ T_1 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}2 \cdot 10 + T_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6\sqrt{3} = T_1\sqrt{3} + T_2 \\ T_1 = 4 + T_2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{3} = (4 + T_2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} + T_2$$

$$6\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + 3T_2 + T_2$$

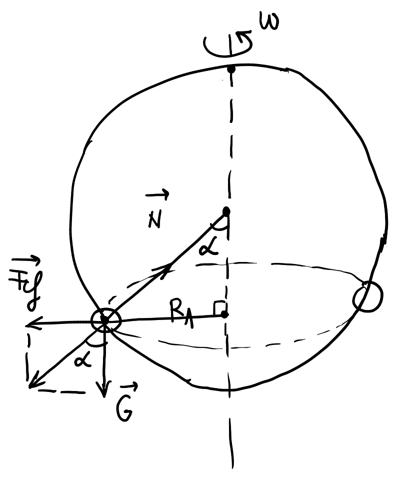
$$T_2 = \frac{6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866 N$$

$$T_1 = 4 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 5{,}5 N$$

(15) Pe un inel de sârmă cu raza $R = 80cm$ aflat în plan vertical ca în figura alăturată, poate aluneca fără frecare o bilă. Inelul este pus în mișcare de rotație în jurul axei sale verticale cu viteza unghiulară constantă $\omega = 5 rad/s$. Să se afle unghiul pe care îl face în timpul mișcării axa de rotație cu direcția obținută prin unirea centrului inelului cu bila.

$R = 80 cm$
$\omega = 5 rad/s$

$\alpha = ?$



$$tg\,\alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{F_{cf}}{G} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot R_1}{mg} \quad \text{dar } R_1 = R \sin\alpha$$

$$\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{\cancel{m}\omega^2 R \sin\alpha}{\cancel{m}g}$$

$$\frac{\cancel{\sin\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 R \cancel{\sin\alpha}}{g}$$

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 R}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{10}{5^2 \cdot 0{,}8}\right)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha = 60^0$$